Оглавление

[1. Основные понятия теории вероятностей. Пространство элементарных событий. Алгебра событий, основные законы событий. 2](#_Toc106492474)

[2. Основные аксиомы теории вероятностей. 3](#_Toc106492475)

[3. Классическое определение вероятностей. Геометрический метод задания вероятностей. 3](#_Toc106492476)

[4. Условная вероятность. Независимость событий. 4](#_Toc106492477)

[5. Формула полной вероятности. Формула Байеса. 5](#_Toc106492478)

[6. Последовательность независимых испытаний. Формула Бернулли. 6](#_Toc106492479)

[7. Теорема Пуассона 7](#_Toc106492480)

[8. Случайная величина. Законы распределения дискретных случайных величин. 8](#_Toc106492481)

[9. Функция распределения случайной величины и ее свойства. 11](#_Toc106492482)

[10. Плотность распределения и ее свойства. 11](#_Toc106492483)

[11. Распределение двумерной случайной величины и ее свойства. 12](#_Toc106492484)

[12. Плотность распределения двумерной случайной величины и ее свойства. 14](#_Toc106492485)

[13. Условные законы распределения двумерной случайной величины. 15](#_Toc106492486)

[14. Зависимые и независимые случайные величины. 16](#_Toc106492487)

[15. Общее определение математического ожидания (МО) и его свойства. 17](#_Toc106492488)

[16. Дисперсия и ее свойства. 18](#_Toc106492489)

[17. Моменты распределения одномерной случайной величины. 19](#_Toc106492490)

[18. Ковариация, коэффициент корреляции. 19](#_Toc106492491)

[19. Характеристические функции и их свойства 21](#_Toc106492492)

[20. Центральная предельная теорема (знать что такое сходимость по вероятности, слабая сходимость) 23](#_Toc106492493)

[21. Основные законы распределения вероятностей случайной величины. Биномиальный, Пуассоновский законы. Геометрическое распределение. 24](#_Toc106492494)

[22. Равномерное, экспоненциальное распределение случайной величины. 25](#_Toc106492495)

[23. Нормальное распределение. Функция Лапласа. 26](#_Toc106492496)

1. Основные понятия теории вероятностей. Пространство элементарных событий. Алгебра событий, основные законы событий.

Два **события называются совместными** в данном опыте, если появление одного из них не исключает появления другого в этом опыте. Например, при подбрасывании двух симметричных монет произошли события A – выпал «герб» и В – выпала «цифра», они являются совместными.

Два **события называются несовместными**, если они не могут произойти вместе при одном и том же испытании. Например, несовместными являются попадание и промах при одном выстреле.

Различают события **совместные** и **несовместные**. События называются **совместными**, если наступление одного из них не исключает наступления другого. В противном случае события называются несовместными.

**Два события называются противоположными**, если появление одного из них равносильно непоявлению другого. Например, события: выпал «герб» и выпала «цифра» - при одном подбрасывании симметричной монеты являются противоположными

**Полная группа событий** – множество событий 1 2 , ,..., , A A An если они попарно несовместны, появление одного и только одного из них является достоверным событием. Поясним понятие полной группы **на примере**:

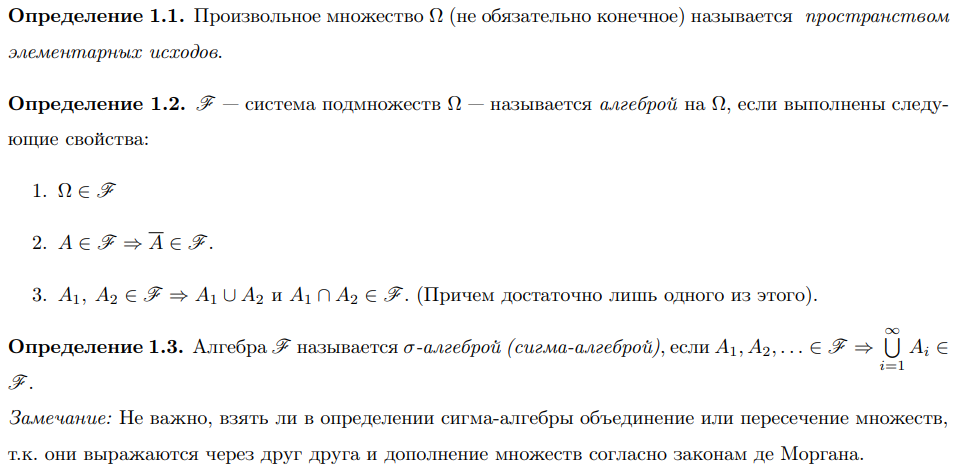
Рассмотрим события, появляющиеся при подбрасывании игрального кубика (т.е. кубика, на гранях которого записаны цифры 1,2,3,4,5,6 или изображены знаки, соответствующие этим цифрам). Когда кубик упадет, то верхней гранью окажется грань с одной из этих цифр. Событие: «верхней гранью оказалась грань с цифрой k » обозначим через ( 1,6). A k k = События A1 A2 A3 A4 A5 A6 образуют полную группу.

**Элементарные исходы** (элементарные события или шансы) – события, которые могут наступить в результате опыта и которые невозможно (или нет необходимости) разложить на более простые составляющие события. Например, события A1 A2 A3 A4 A5 A6 - элементарные исходы при подбрасывании кубика.

**Пространство элементарных событий** — множество {\displaystyle \Omega } Ω всех различных исходов случайного эксперимента. Элемент этого множества {\displaystyle \omega \in \Omega }ω∈Ω называется **элементарным событием** или **исходом**.

Простейшие неразложимые результаты опыта называются элементарными событиями (ωi), а вся совокупность элементарных событий **называется пространством элементарных событий** Ω={ωi}. С каждым опытом связано свое пространство элементарных событий Ω. Например, игральная кость подбрасывается один раз. Элементарные события: w1 – появление 1, w2 – 2, w3 – 3, w4 – 4, w5 – 5, w6 – 6. Пространство элементарных событий W={w1, w2, w3, w4, w5, w6}.

1. Основные аксиомы теории вероятностей.



**Аксиома 1**. Каждому событию соответствует определенное число, удовлетворяющее условию и называемое его вероятностью.

**Аксиома 2**. Вероятность достоверного события равна единице.

**Аксиома 3**. Вероятность невозможного события равна нулю.

**Аксиома 4**. (аксиома сложения). Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме их вероятностей.

1. Классическое определение вероятностей. Геометрический метод задания вероятностей.

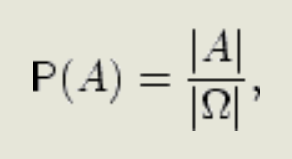
**Вероятностью события** называется отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу. Вероятность события A обозначается через P (A). По определению

P(A)=n/m

Где m – число элементарных исходов, благоприятствующих событию A;

n – число всех равновозможных элементарных исходов опыта

**Эксперимент удовлетворяет классическому определению вероятности, если** пространство элементарных исходов состоит из конечного |Ω| = N числа равновозможных исходов. В этом случае вероятность любого события А вычисляется по формуле:



называемой **классическим определением вероятности**.

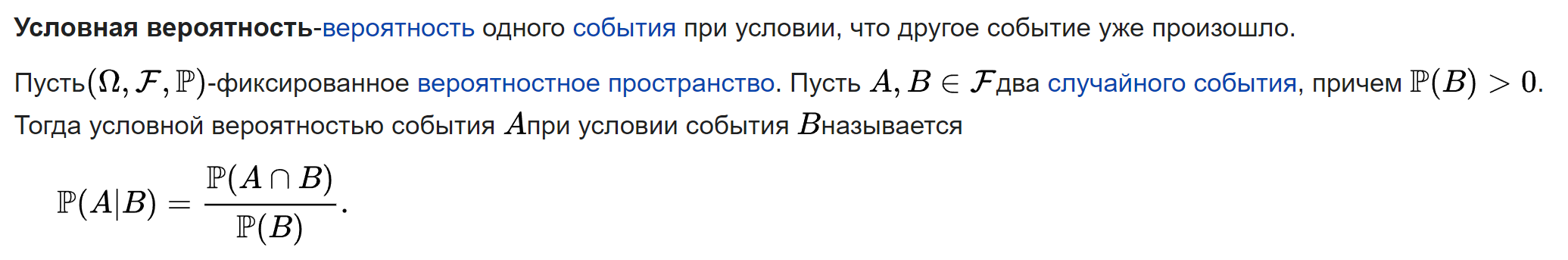
Также эту **формулу читают как**: «вероятность события A равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию A, к общему числу исходов»

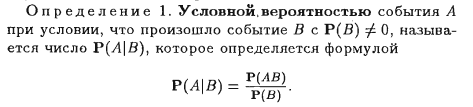
Подход, называемый **геометрическим определением вероятности**:

Вероятность наступления некоторого события A в испытании равна отношению , где G – геометрическая мера, выражающая общее число всех возможных и равновозможных исходов данного испытания, а g – мера, выражающая количество благоприятствующих событию A исходов. На практике в качестве такой геометрической меры чаще всего выступает длина или площадь, реже – объём.

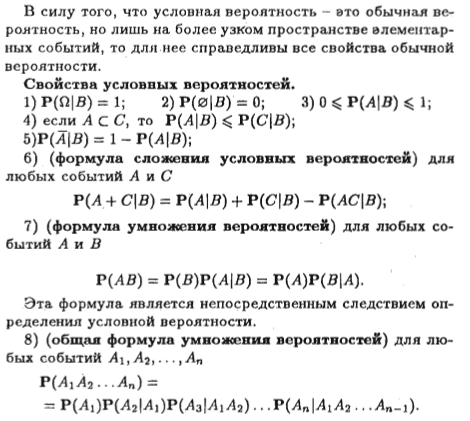
1. Условная вероятность. Независимость событий.

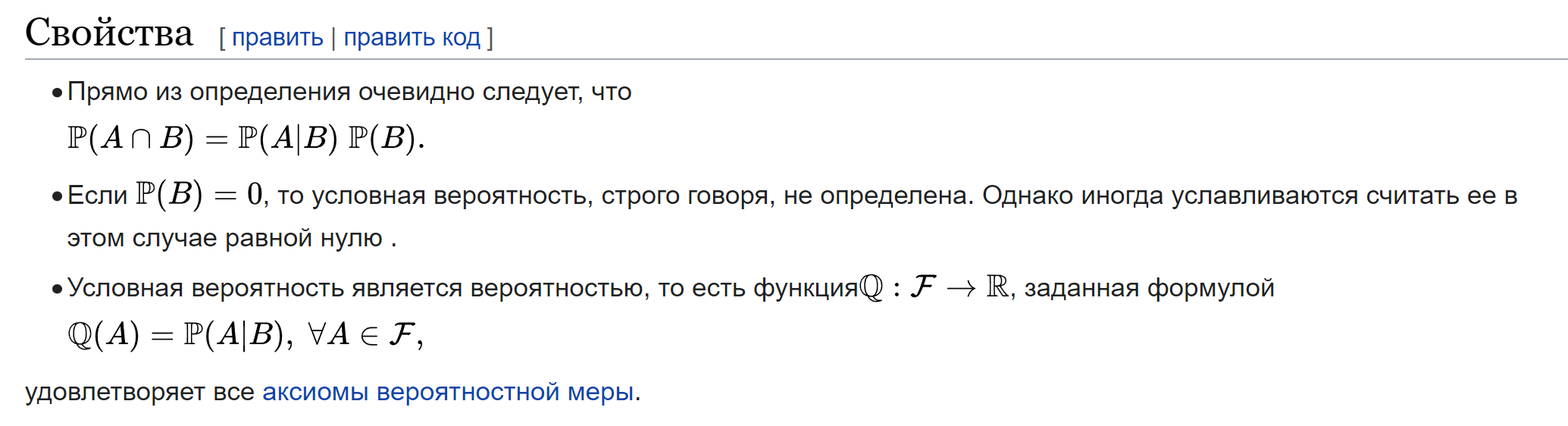
**Условная вероятность:**

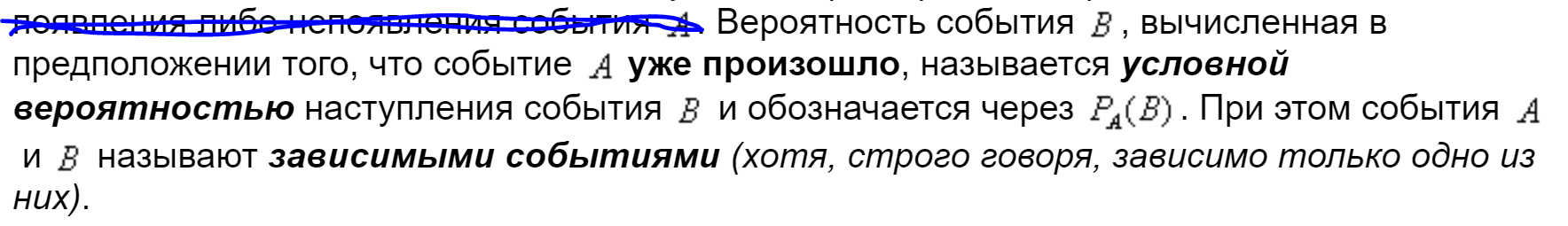


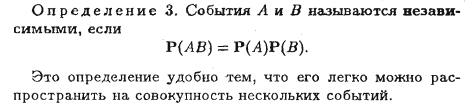


Свойства:





Также иными словами:  




**События являются независимыми**, если вероятность наступления любого из них не зависит от появления остальных событий рассматриваемого множества событий.

1. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Собственно, продолжаем. Рассмотрим зависимое событие http://www.mathprofi.ru/n/formula_polnoj_verojatnosti_formuly_bajesa_clip_image002.gif, которое может произойти лишь в результате осуществления одной из несовместных гипотез http://www.mathprofi.ru/n/formula_polnoj_verojatnosti_formuly_bajesa_clip_image004.gif, которые образуют полную группу. Пусть известны их вероятности http://www.mathprofi.ru/n/formula_polnoj_verojatnosti_formuly_bajesa_clip_image006.gif и соответствующие условные вероятности http://www.mathprofi.ru/n/formula_polnoj_verojatnosti_formuly_bajesa_clip_image008.gif. Тогда вероятность наступления события http://www.mathprofi.ru/n/formula_polnoj_verojatnosti_formuly_bajesa_clip_image002_0000.gif равна:

http://www.mathprofi.ru/n/formula_polnoj_verojatnosti_formuly_bajesa_clip_image010.gif

Эта формула получила название **формулы полной вероятности.**

Материал тесно связан с содержанием предыдущего параграфа. Пусть событие http://www.mathprofi.ru/n/formula_polnoj_verojatnosti_formuly_bajesa_clip_image002_0008.gif наступило в результате осуществления одной из гипотез http://www.mathprofi.ru/n/formula_polnoj_verojatnosti_formuly_bajesa_clip_image066.gif.  Как определить вероятность того, что имела место та или иная гипотеза?

При условии, что событие http://www.mathprofi.ru/n/formula_polnoj_verojatnosti_formuly_bajesa_clip_image002_0009.gif уже произошло, вероятности гипотез *переоцениваются* по **формулам**, которые получили фамилию английского священника Томаса **Байеса**:

http://www.mathprofi.ru/n/formula_polnoj_verojatnosti_formuly_bajesa_clip_image068.gif – вероятность того, что имела место гипотеза http://www.mathprofi.ru/n/formula_polnoj_verojatnosti_formuly_bajesa_clip_image014_0001.gif;  
http://www.mathprofi.ru/n/formula_polnoj_verojatnosti_formuly_bajesa_clip_image071.gif – вероятность того, что имела место гипотеза http://www.mathprofi.ru/n/formula_polnoj_verojatnosti_formuly_bajesa_clip_image017_0002.gif;  
http://www.mathprofi.ru/n/formula_polnoj_verojatnosti_formuly_bajesa_clip_image074.gif – вероятность того, что имела место гипотеза http://www.mathprofi.ru/n/formula_polnoj_verojatnosti_formuly_bajesa_clip_image020_0001.gif;  
…  
http://www.mathprofi.ru/n/formula_polnoj_verojatnosti_formuly_bajesa_clip_image077.gif – вероятность того, что имела место гипотеза http://www.mathprofi.ru/n/formula_polnoj_verojatnosti_formuly_bajesa_clip_image022_0000.gif.

На первый взгляд кажется полной нелепицей – зачем пересчитывать вероятности гипотез, если они и так известны? Но на самом деле разница есть:

http://www.mathprofi.ru/n/formula_polnoj_verojatnosti_formuly_bajesa_clip_image006_0000.gif – это *априорные* (оцененные **до** испытания) вероятности.

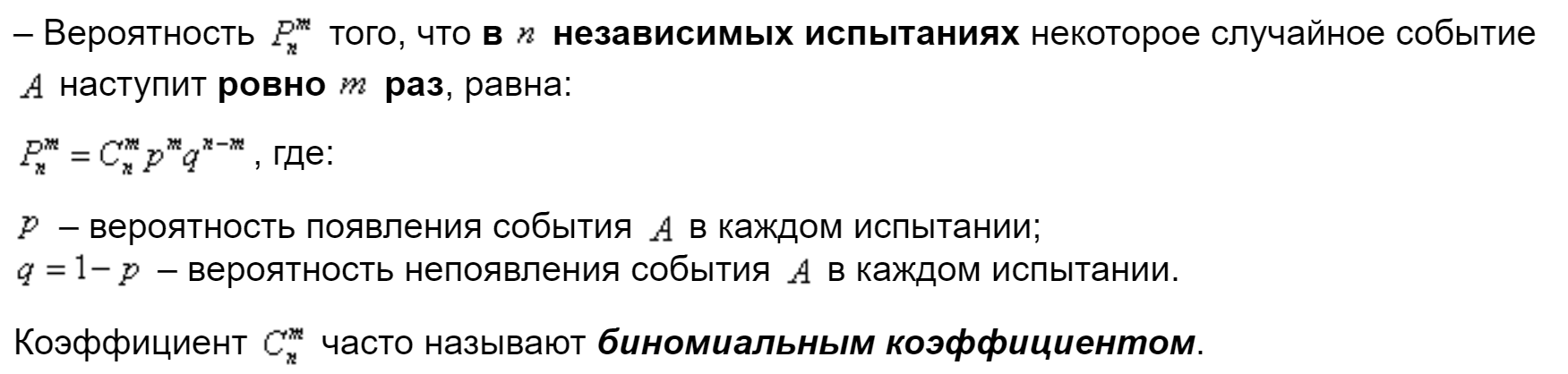
http://www.mathprofi.ru/n/formula_polnoj_verojatnosti_formuly_bajesa_clip_image080.gif – это *апостериорные* (оцененные **после** испытания) вероятности тех же гипотез, пересчитанные в связи «со вновь открывшимися обстоятельствами » – с учётом того факта, что событие http://www.mathprofi.ru/n/formula_polnoj_verojatnosti_formuly_bajesa_clip_image002_0010.gif **достоверно произошло**.

1. Последовательность независимых испытаний. Формула Бернулли.

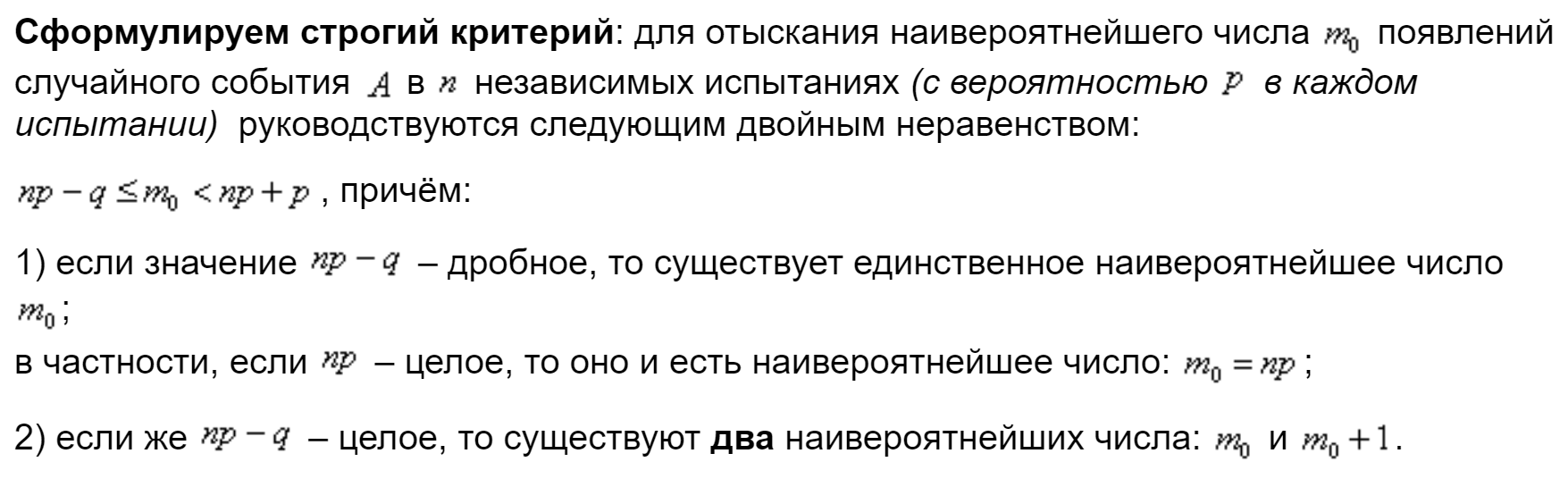
Независимые испытания:  
Пусть производится несколько испытаний. Если вероятность появления некоего события **А** в каждом из них не зависит от исходов остальных испытаний, то оно **является независимым**. При этом под словосочетанием «независимые испытания» часто подразумевают **повторные независимые испытания** – когда они осуществляются друг за другом.

**Последовательностью независимых испытаний называется** конечная вероятностная схема, в которой вероятности элементарных событий определяется формулой http://vm.tstu.tver.ru/math_web_old/topic/teor/lect_3/image1/im7.gif = http://vm.tstu.tver.ru/math_web_old/topic/teor/lect_3/image1/im8.gif , как произведение вероятностей исходов отдельных испытаний. **Ее называют еще схемой независимых испытаний или полиномиальной схемой.**

Формула Бернулли:

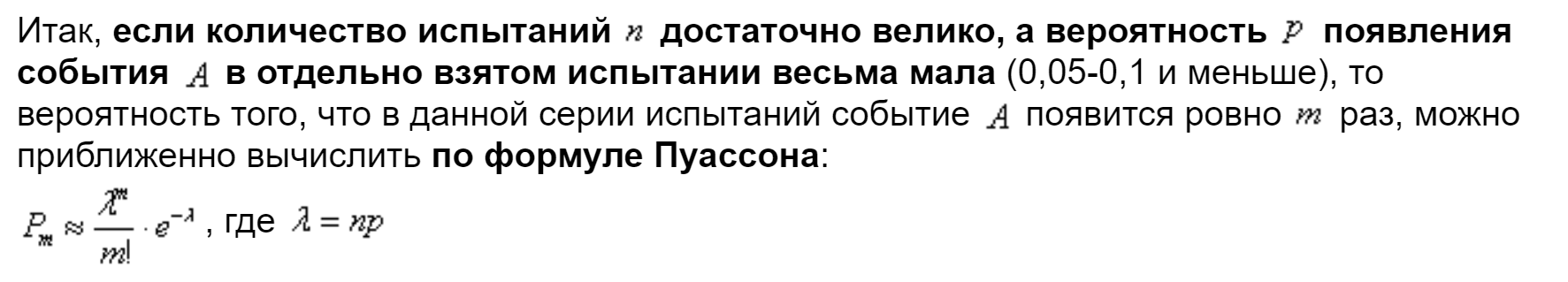


**Примечание**: формула Бернулли справедлива только для тех независимых испытаний, в которых вероятность **p** события **A** сохраняется постоянной.

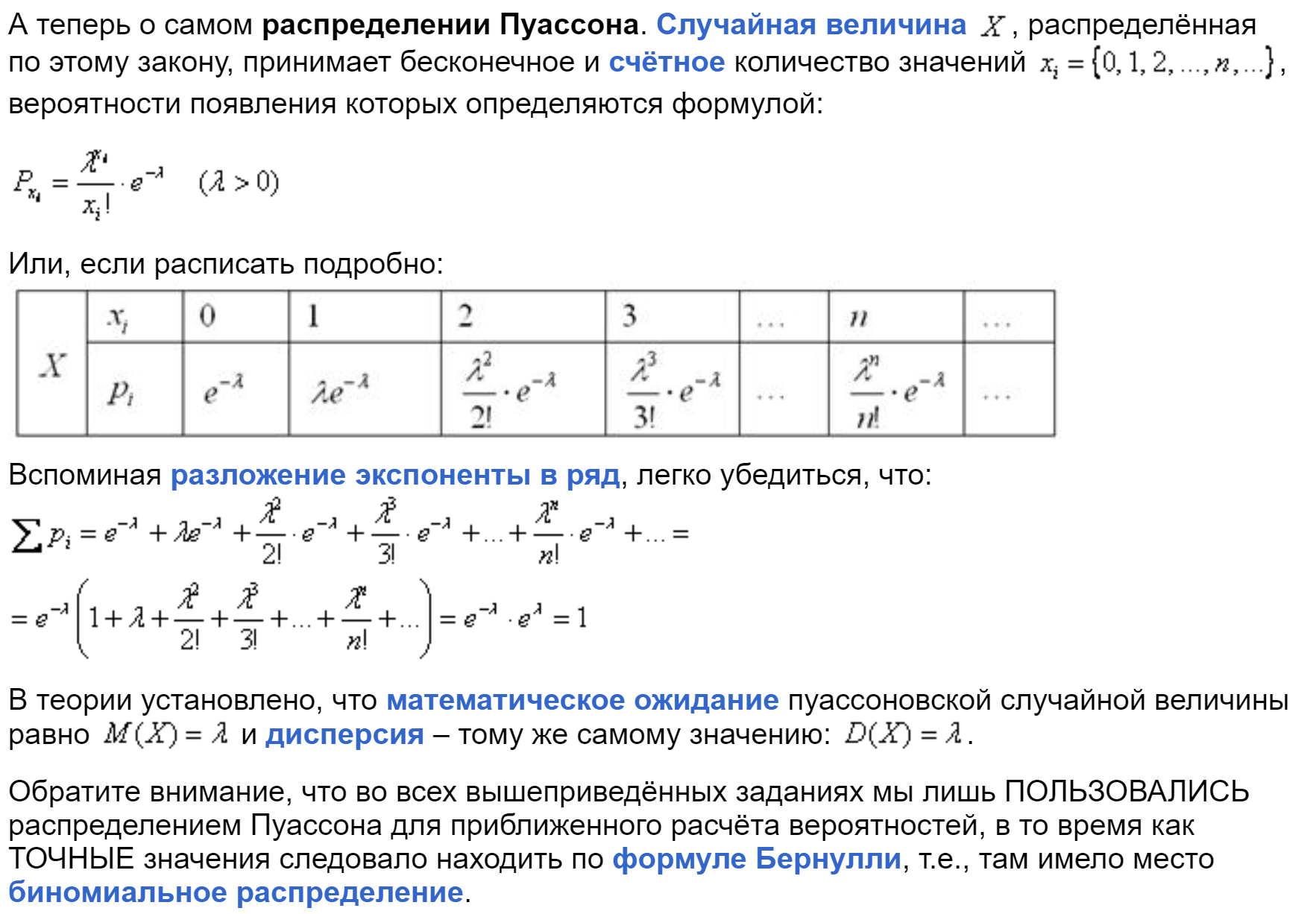


1. Теорема Пуассона

Формула Пуассона:

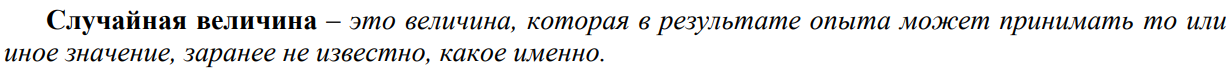


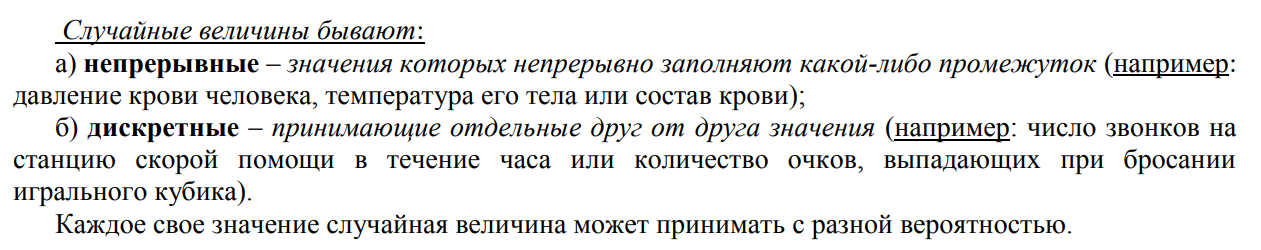
Распределение Пуассона:

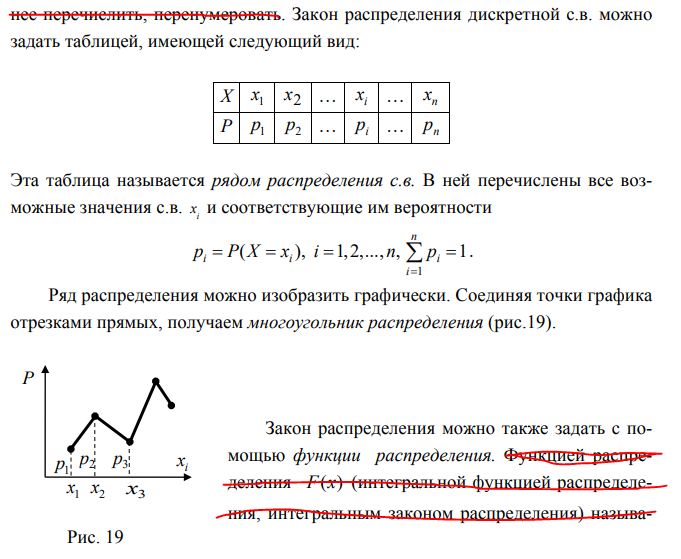


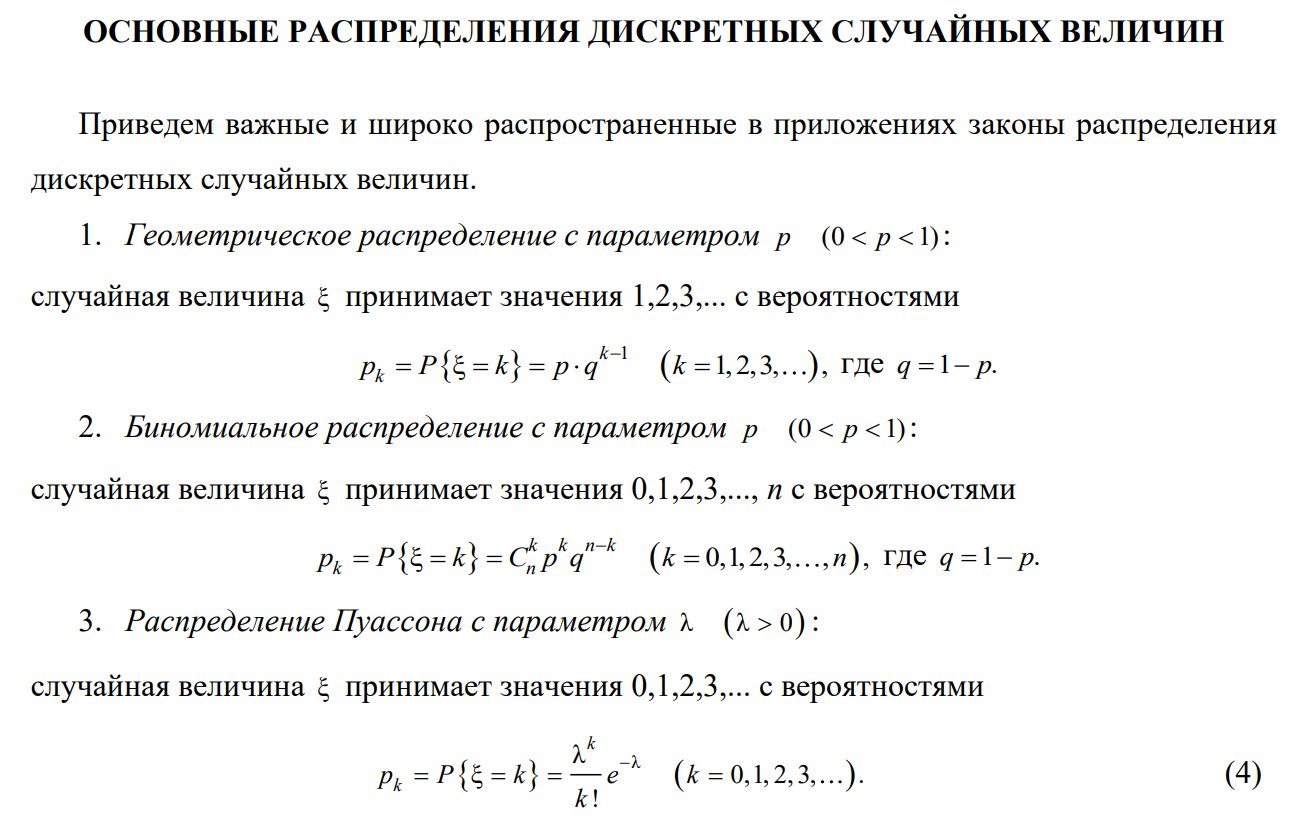
1. Случайная величина. Законы распределения дискретных случайных величин.

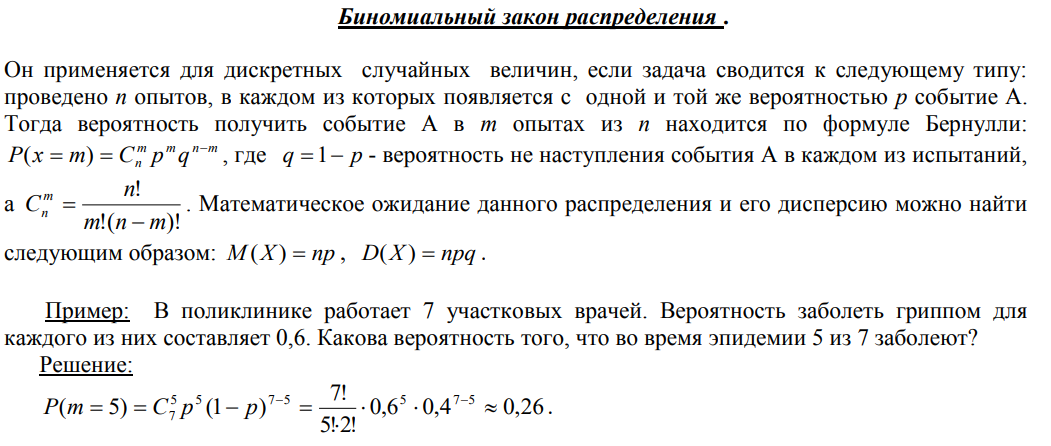
Случайная величина:

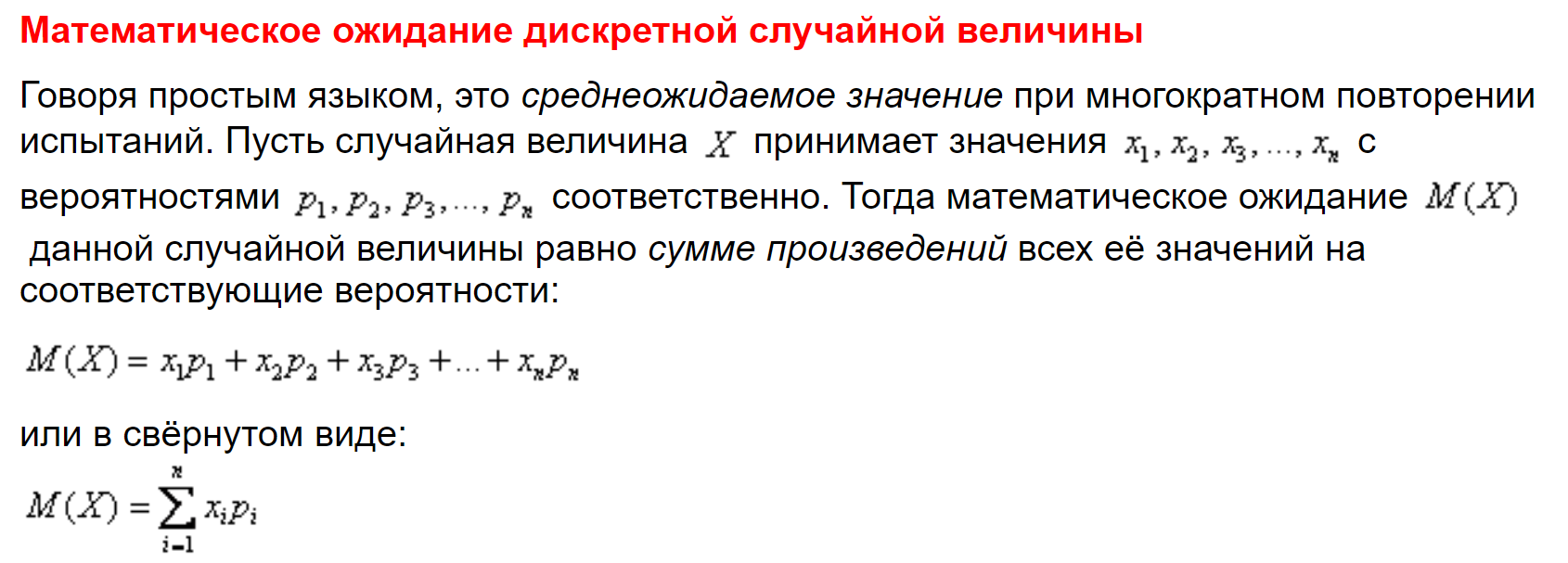




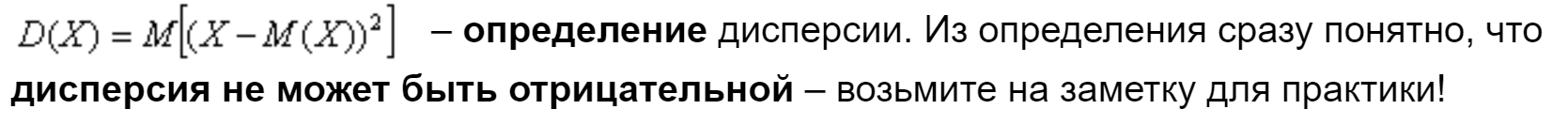




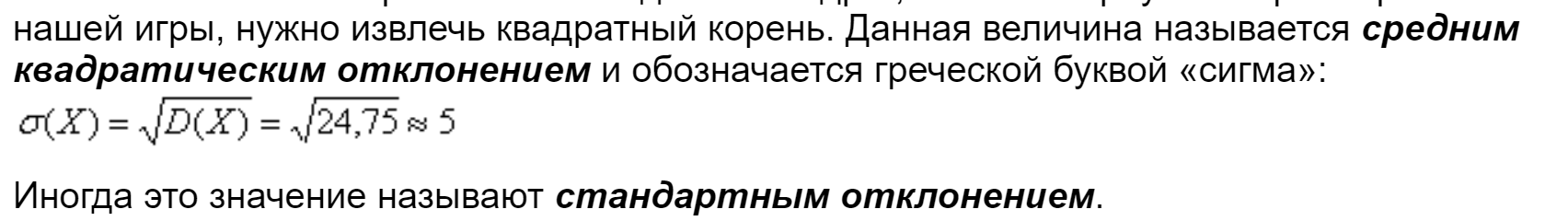




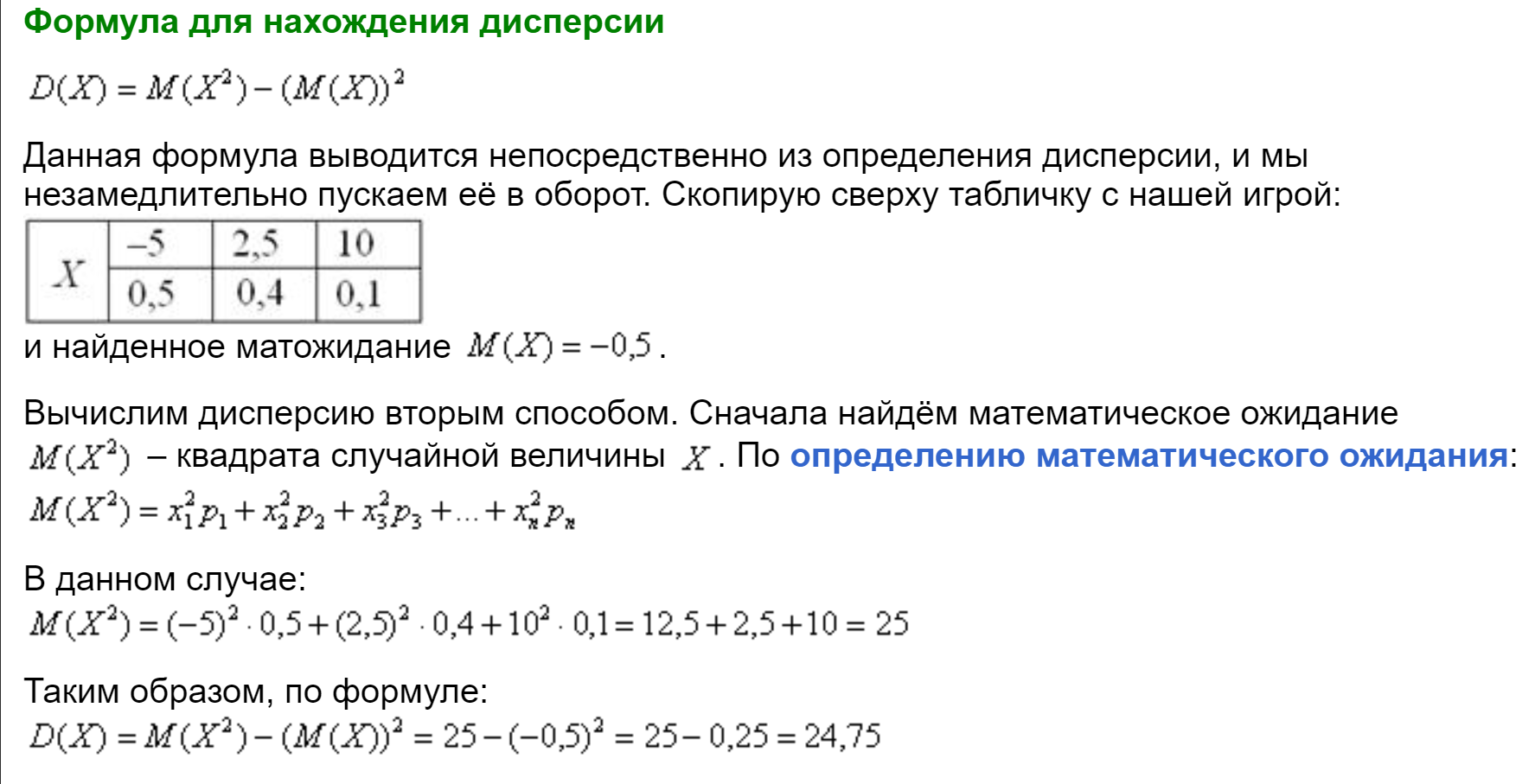
Формула дисперсии:



Среднее квадратическое\стандартное отклонение:

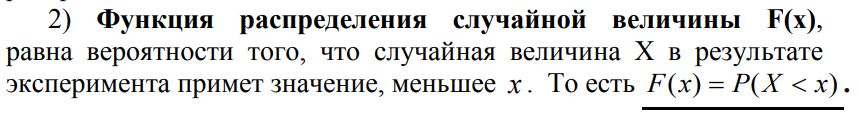


Пример дисперсии:

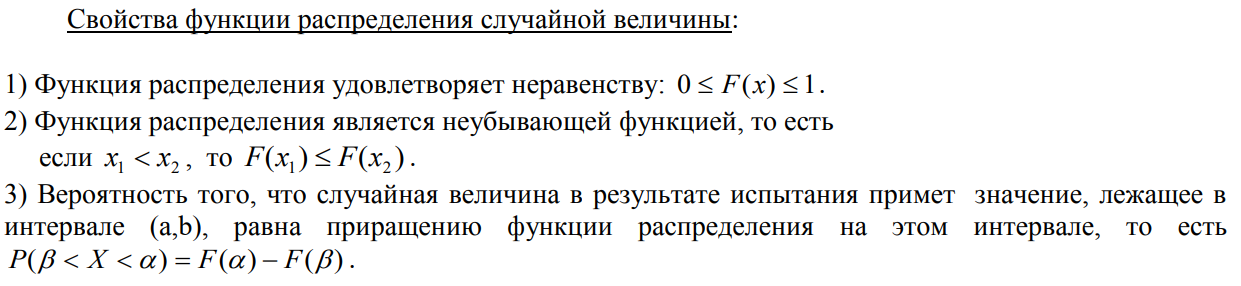


1. Функция распределения случайной величины и ее свойства.

Функция распределения случайной величины:

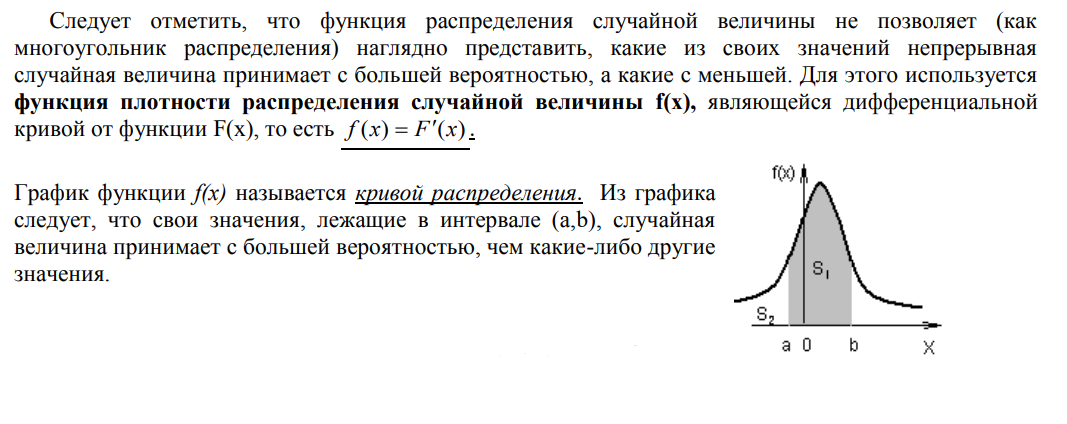


Свойства функции распределения случайной величины:

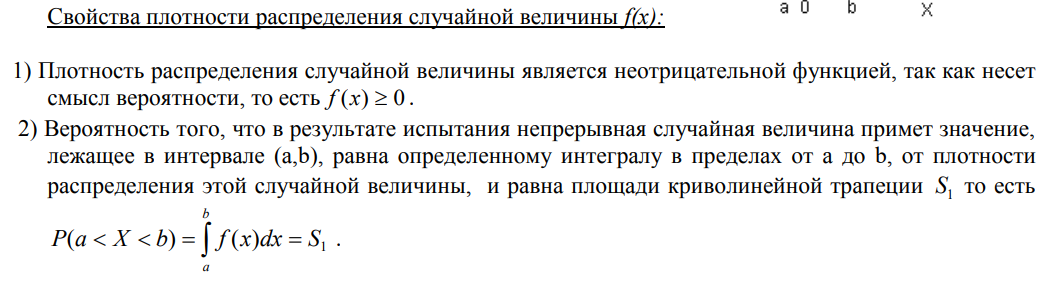


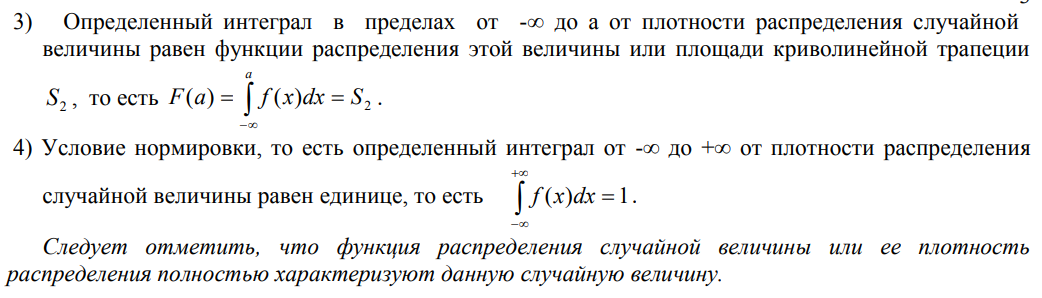
1. Плотность распределения и ее свойства.

Плотность распределения:

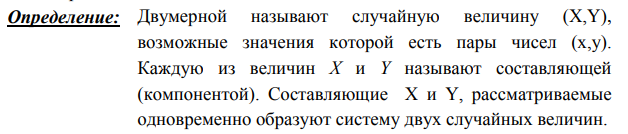


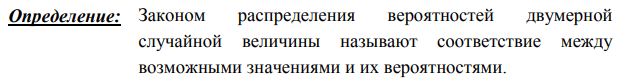
Свойства плотности распределения:



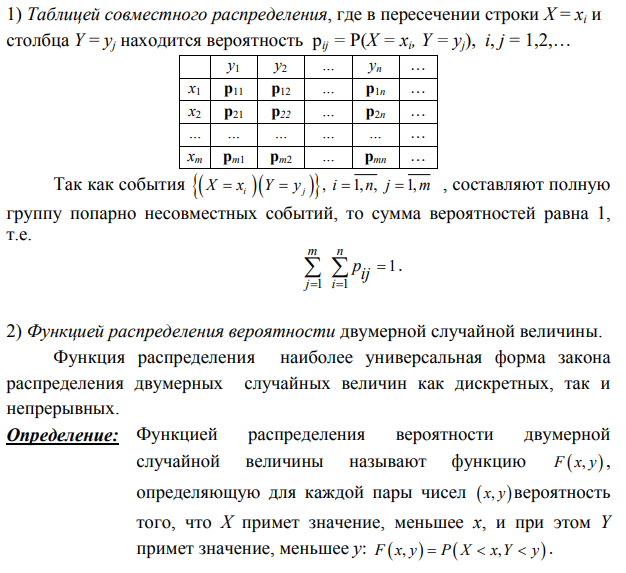


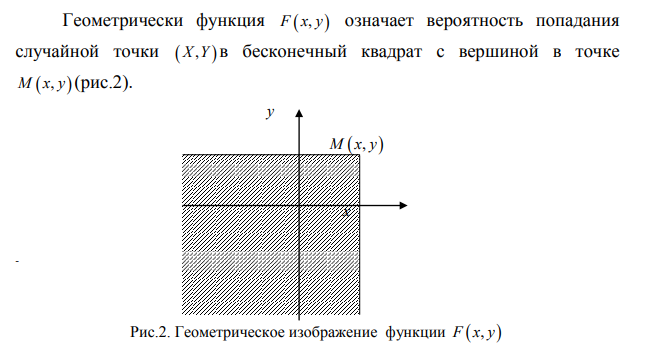
1. Распределение двумерной случайной величины и ее свойства.



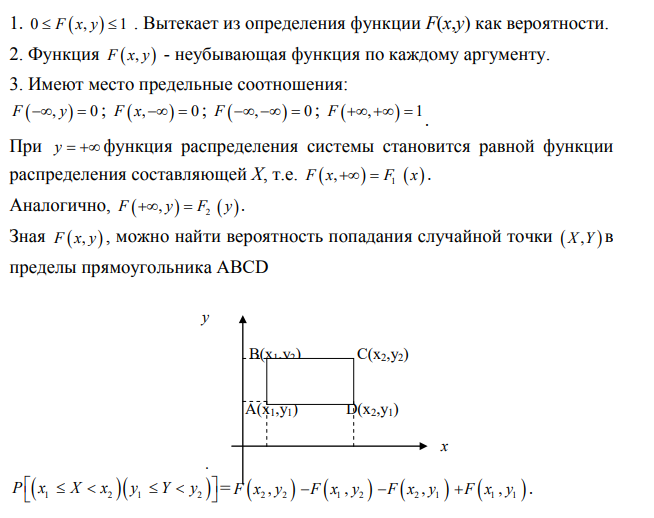




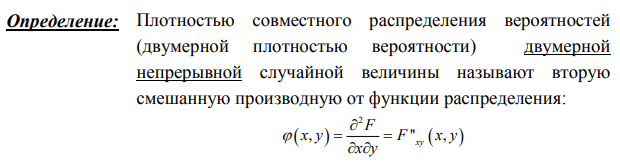


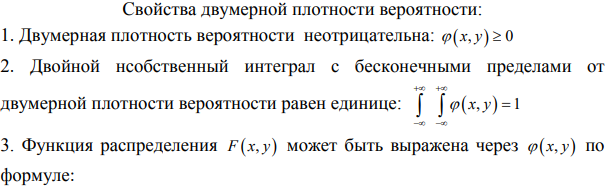


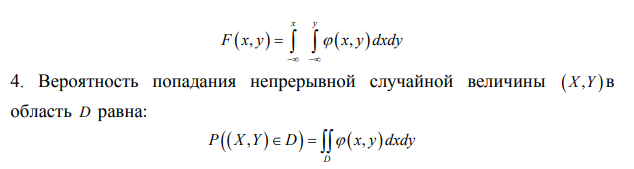




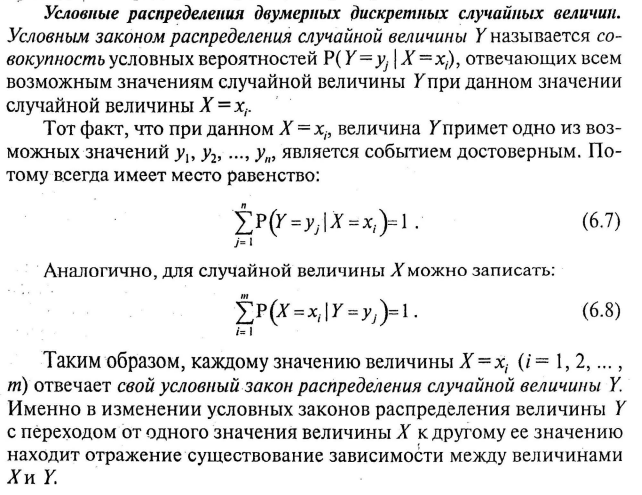
1. Плотность распределения двумерной случайной величины и ее свойства.



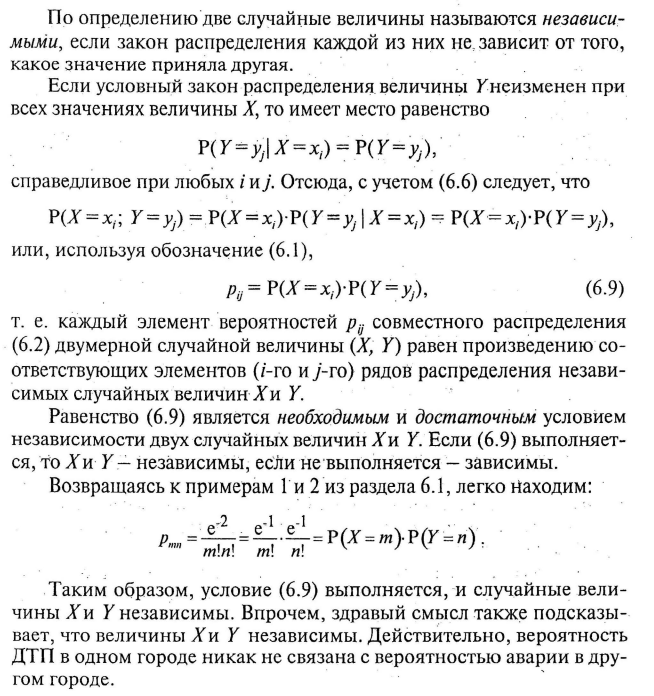




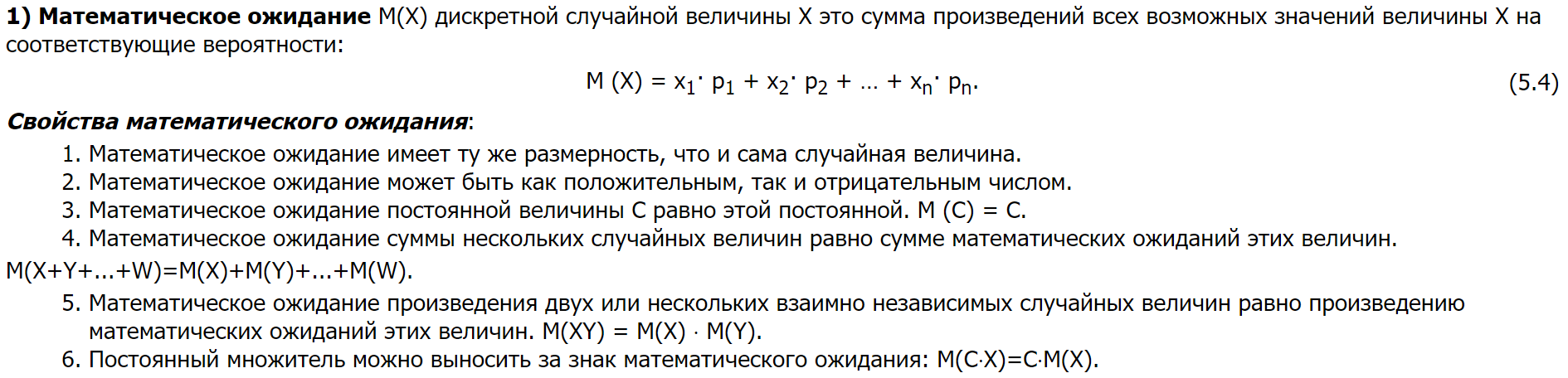
1. Условные законы распределения двумерной случайной величины.

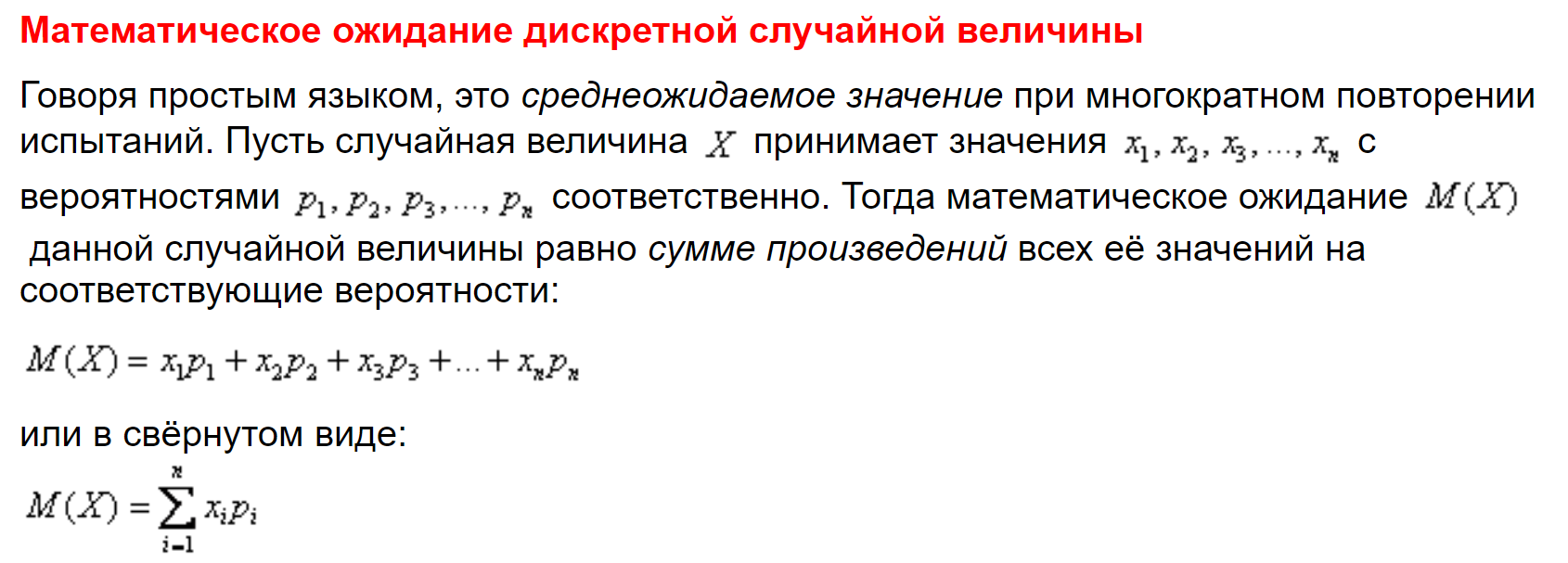


1. Зависимые и независимые случайные величины.

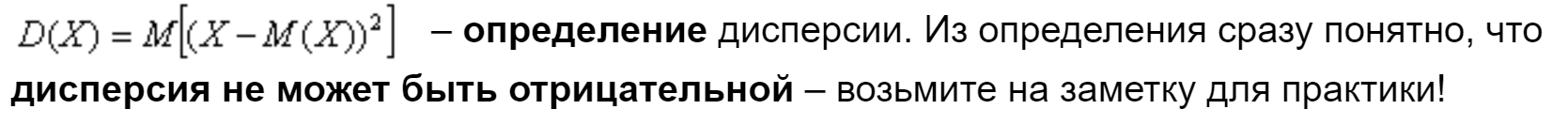


1. Общее определение математического ожидания (МО) и его свойства.

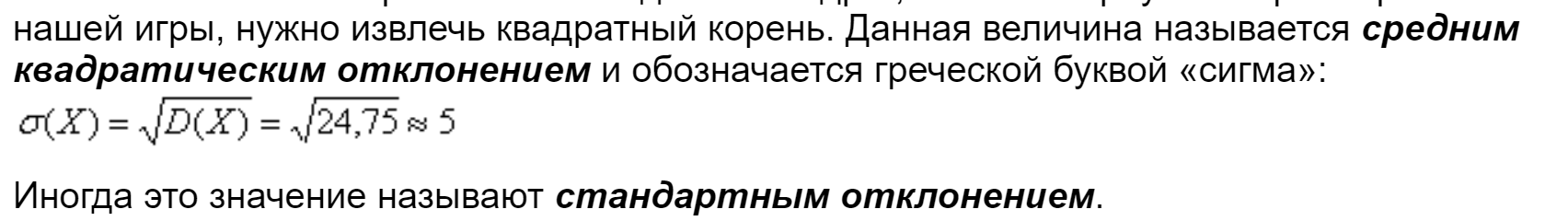




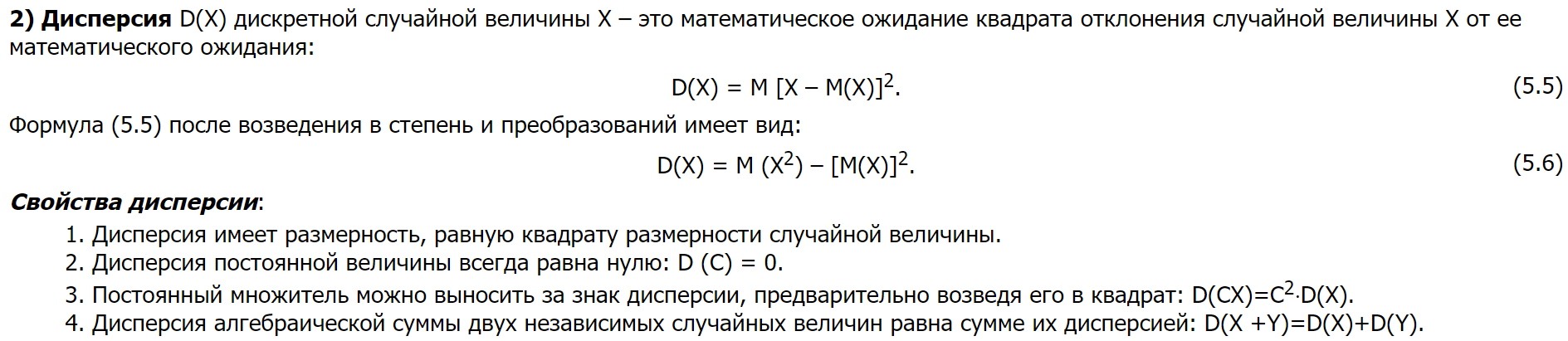
Формула дисперсии:



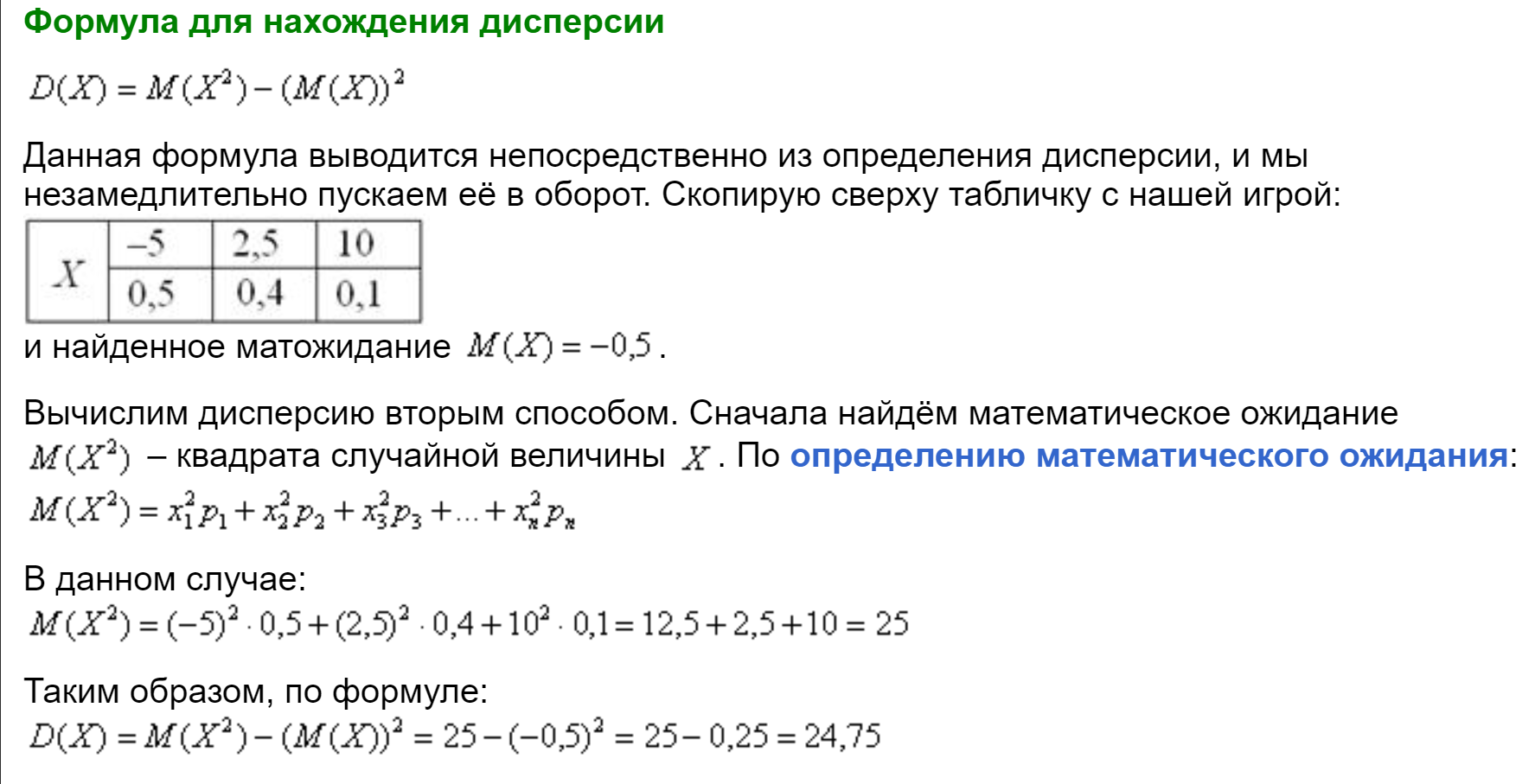
Среднее квадратическое\стандартное отклонение:



1. Дисперсия и ее свойства.



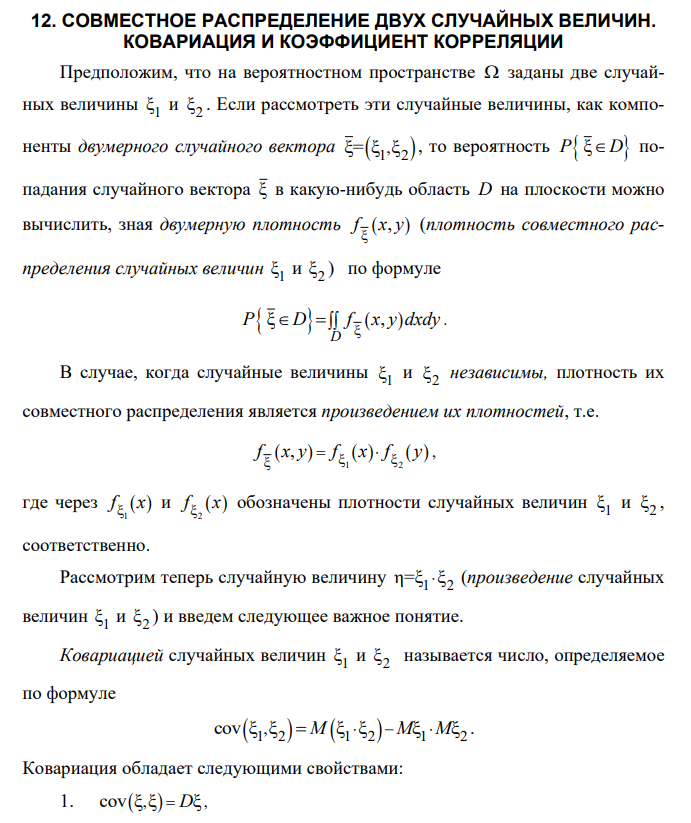
Пример дисперсии:

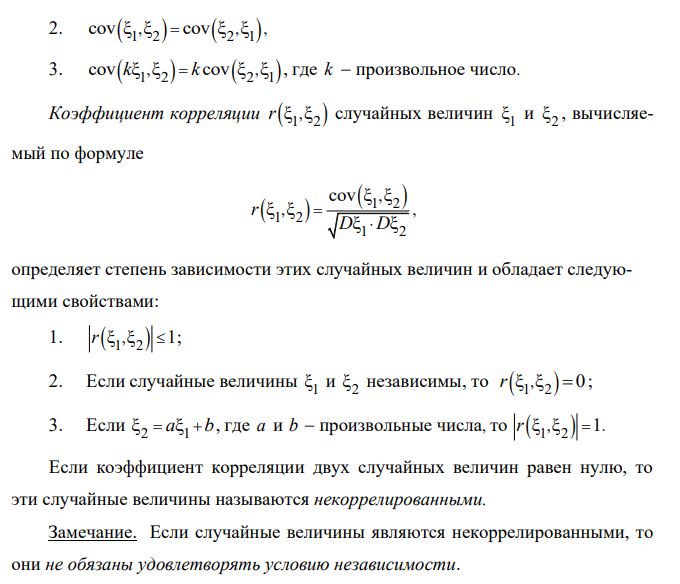


1. Моменты распределения одномерной случайной величины.



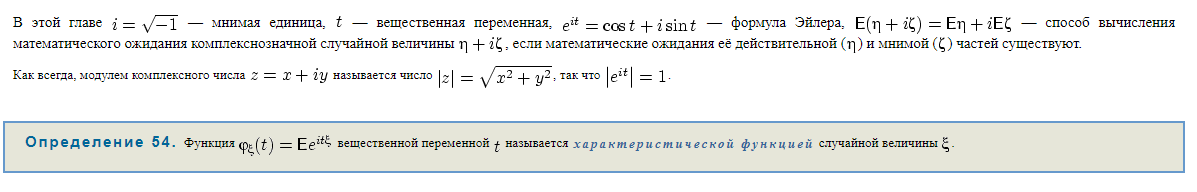
1. Ковариация, коэффициент корреляции.





1. Характеристические функции и их свойства

Определение:



Свойства:

1. Характеристическая функция всегда существует:

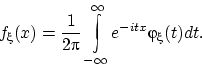
https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img1611.gif

Док-во: Воспользуемся свойством https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img1612.gif , равносильным неравенству https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img1613.gif:

https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img1614.gif

2. По характеристической функции однозначно восстанавливается распределение (значение случайной величины). Т.е. если две случайные величины имеют одинаковые характеристические функции, то и распределения этих величин совпадают.

Если модуль характеристической функции интегрируем на всей прямой, то у случайной величины есть плотность распределения, и она находится по формуле:



3. Характеристическая функция случайной величины https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img1616.gif связана с характеристической функцией случайной величины https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img155.gif равенством:

https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img1617.gif

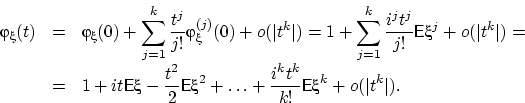
4. Характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению характеристических функций слагаемых: если случайные величины https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img155.gif и https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img156.gif независимы, то, по свойству (Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий: если https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img155.gif и https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img156.gif независимы и их математические ожидания существуют) математических ожиданий:

https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img1622.gif

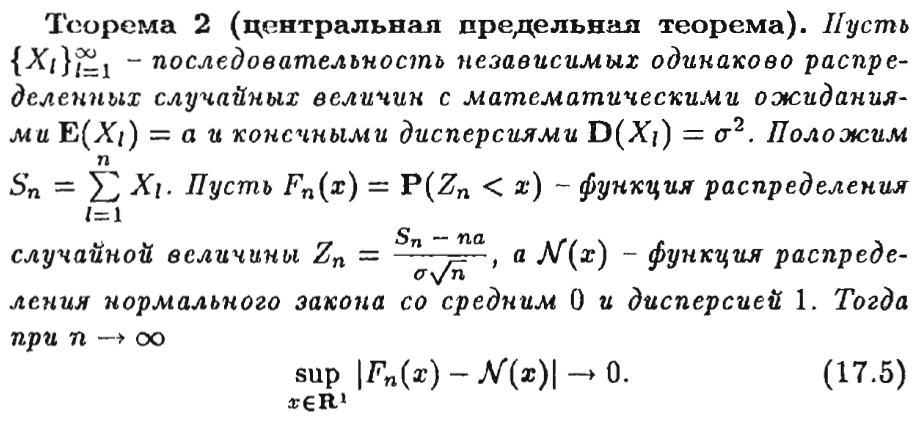
5. Пусть существует [момент](https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/node44.html#3280) порядка https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img480.gif [случайной величины](https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/node23.html#1617) https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img155.gif, [т.е.](https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/node43.html#co43-10) https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img1097.gif. Тогда [характеристическая функция](https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/node63.html) https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img1635.gif непрерывно дифференцируема https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img2.gif раз, и её https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img2.gif-я производная в нуле связана с моментом порядка https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img2.gif равенством:

https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img1636.gif

6. Пусть существует момент порядка https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img480.gif случайной величины https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img155.gif, [т.е.](https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/node43.html#co43-10) https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img1097.gif. Тогда [характеристическая функция](https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/node63.html) https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img1635.gif в окрестности точки https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img1639.gif разлагается в ряд Тейлора:



1. Центральная предельная теорема (знать что такое сходимость по вероятности, слабая сходимость)



Говорят, **что последовательность случайных величин https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img1222.gif сходится** слабо или по распределению к случайной величине https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img155.gif и пишут: https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img1490.gif, если для любого https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img181.gif такого, что функция распределения https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img1489.gif непрерывна в точке https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img181.gif, имеет место сходимость  при .

**Слабая сходимость** — это сходимость функций распределения во всех точках непрерывности предельной функции распределения.

**Сходимость по вероятности** влечёт слабую сходимость. Обратное утверждение в общем случае смысла не имеет (см. замечание 25). Однако из слабой сходимости к постоянной вытекает сходимость по вероятности.

**Свойство**: Если https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img1490.gif, и функция распределения https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img1489.gif непрерывна в точках https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img520.gif и https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img521.gif, то https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img1495.gif. Наоборот, если во всех точках https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img520.gif и https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img521.gif непрерывности функции распределения https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img1489.gif имеет место сходимость https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img1495.gif, то https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img1490.gif.

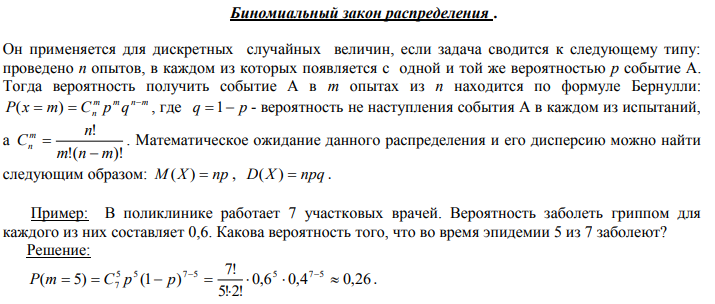
Свойство 20.

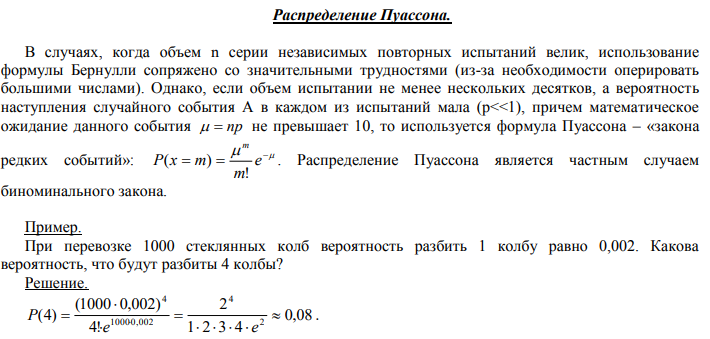
1. Если https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img1330.gif, то https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img1490.gif.

2. Если https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img1496.gif, то https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img1393.gif.

Итак, **сходимость по вероятности влечёт слабую сходимость**. Однако **из слабой сходимости к постоянной вытекает сходимость по вероятности**.

1. Основные законы распределения вероятностей случайной величины. Биномиальный, Пуассоновский законы. Геометрическое распределение.





**Геометрическое распределение**

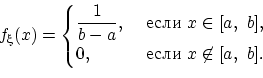
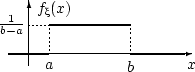
Говорят, что случайная величина https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img473.gif имеет ***геометрическое распределение*** с параметром https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img458.gif, и пишут https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img666.gif, если https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img473.gif принимает значения https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img667.gif [с вероятностями](https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/node18.html#1285) https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img668.gif. Случайная величина с таким распределением имеет смысл ***номера первого успешного испытания*** в [схеме Бернулли](https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/node17.html#1253) с вероятностью успеха https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img472.gif. Таблица распределения https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img473.gif имеет вид:

https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img669.gif

1. Равномерное, экспоненциальное распределение случайной величины.

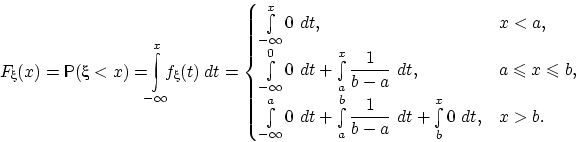
**Равномерное распределение:**

Говорят, что https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img155.gif имеет равномерное распределение на отрезке https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img254.gif, и пишут: https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img677.gif, если плотность распределения https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img155.gif постоянна на отрезке https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img254.gif и равна нулю вне него:

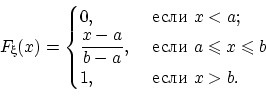
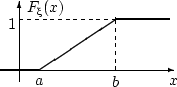
 

Очевидно, что площадь под графиком этой функции равна единице и https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img618.gif. Поэтому  https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img616.gif является плотностью распределения.

Случайная величина https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img677.gif имеет смысл координаты точки, выбранной наудачу на отрезке https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img254.gif. Вычислим по определению 30 функцию распределения случайной величины https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img155.gif:

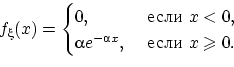
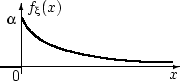


Получим следующую непрерывную функцию распределения:

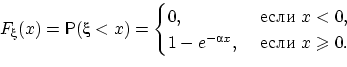
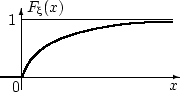
 

**Показательное распределение (экспоненциальное):**

Говорят, что https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img155.gif имеет показательное (экспоненциальное) распределение с параметром https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img683.gif, и пишут: https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img684.gif, если https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img155.gif имеет следующую плотность распределения:

Функция распределения случайной величины https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/img155.gif непрерывна:

Показательное распределение является единственным абсолютно непрерывным распределением, для которого выполнено свойство «нестарения» (и в этом смысле оно является непрерывным аналогом дискретного геометрического распределения).

1. Нормальное распределение. Функция Лапласа.

